9/3

X σύνολα	Διαμερίσεις του X	Σχέσεις ισοδ. επί του X
$X=\{x\}$	$\Delta=\{\{x\}\}=\{X\}$	$R_\Delta = X\times X=\{x\}\times\{x\}=\{(x,x)\}$
$X=\{x,y\}$	$\Delta_1=\{X\}=\{\{x,y\}\}$	$R_{\Delta_1}=X\times X=\{(x,x),(y,y),(x,y),(y,x)\}$
	$\Delta_2=\{\{x\},\{y\}\}$	$R_{\Delta_2}=\{(x,x),(y,y)\}$
$X=\{x,y,z\}$	$\Delta_1=\{X\}=\{\{x,y,z\}\}$	$R_{\Delta_1}=X\times X$
	$\Delta_2=\{\{x,y\},\{z\}\}$	$R_{\Delta_2}=\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,x)\}$
	$\Delta_3=\{\{x,z\},\{y\}\}$	$R_{\Delta_3}=\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,z),(z,x)$
	$\Delta_4=\{\{y,z\},\{x\}\}$	$R_{\Delta_4}=\{(x,x),(y,y),(z,z),(y,z),(z,y)\}$
	$\Delta_5=\{\{x\},\{y\},\{z\}\}$	$R_{\Delta_5}=\{(x,x),(y,y),(z,z)\}$

Πρόταση

Αν X: μη-κενό πεπερασμένο σύνολο, τότε το πλήθος των δυνατών σχέσεων ισοδυναμίας επί του X, ισοδύναμα το πλήθος των δυνατών διαμερίσεων επί του X είναι ο αριθμός του Bell:

$B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$ όπου $|X|=n$

Αποδεικνύεται ότι: $\boxed{B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k}$

Πχ

$B_1=1$, $B_2=2$, $B_3=5$, $B_4=15$, ..., $B_8=4140$, $B_{10}=115.975$

Πχ

Έχω: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$. Στο σύνολο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ορίζουμε μια σχέση ως εξής: $\forall(\alpha,\beta),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: (\alpha,\beta)\underset{R}{\sim}(c,d) \Leftrightarrow \alpha+d=\beta+c$

Ισχυρισμός: Η σχέση R είναι μια σχ. ισοδυναμίας επί του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ και υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση: $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/_R \longrightarrow \mathbb{Z}$

Απόδειξη

1) $(\alpha,\beta)\underset{R}{\sim}(\alpha,\beta)$ διότι $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

2) Έστω $(\alpha,\beta)\underset{R}{\sim}(c,d)$ τότε $\alpha+d=\beta+c \Rightarrow d+\alpha=c+\beta \Rightarrow (c,d)\underset{R}{\sim}(\alpha,\beta)$

3) Έστω $\left.\begin{array}{l}(\alpha,\beta)\underset{R}{\sim}(c,d) \Rightarrow \alpha+d=\beta+c\\ (c,d)\underset{R}{\sim}(r,s) \Rightarrow c+s=d+r\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+d+r=\beta+c+r \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha+\cancel{c}+s=\beta+\cancel{c}+r \Rightarrow \alpha+s=\beta+r \Rightarrow (\alpha,\beta)\underset{R}{\sim}(r,s)$

Άρα η R σχ. ισοδυναμίας του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

① $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$: $[(\alpha,\beta)]_R = \{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid (x,y) \underset{R}{\sim} (\alpha,\beta)\}$
$= \{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x+\beta = y+\alpha\} = \{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x-y = \alpha-\beta\}$

Ορίζουμε απεικόνιση: $f : (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/_R \to \mathbb{Z}$, $f([(\alpha,\beta)]_R) = \alpha-\beta$

▷ Αν $[(\alpha,\beta)]_R = [(c,d)]_R$, τότε: $(\alpha,\beta) \underset{R}{\sim} (c,d) \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha+d = \beta+c \Rightarrow \alpha-\beta = c-d \Rightarrow f([(\alpha,\beta)]_R) = f([(c,d)]_R) \Rightarrow f$: καλά ορισμένη

▷ Έστω ότι: $f([(\alpha,\beta)]_R) = f([(c,d)]_R) \Rightarrow \alpha-\beta = c-d \Rightarrow$
$\alpha+d = \beta+c \Rightarrow (\alpha,\beta) \underset{R}{\sim} (c,d) \Rightarrow [(\alpha,\beta)]_R = [(c,d)]_R \Rightarrow f : 1-1$

▷ Έστω $n\in\mathbb{Z}$

- Αν $n\in\mathbb{N}$, τότε: $f([(n+1,1)]_R) = n+1-1 = n$
- Αν $n=0$, τότε: $f([(1,1)]_R) = 1-1 = 0$
- Αν $n<0$, τότε $f([(1,-n+1)]_R) = 1-(-n+1) = n$

$\Rightarrow f$: επί

② Στο σύνολο $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* = \{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid \alpha,\beta\in\mathbb{Z}, \beta\neq 0\}$ όπου $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}-\{0\}$
ορίζουμε μία σχέση R ως εξής:
$\forall (\alpha,\beta), (c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* : (\alpha,\beta) \underset{R}{\sim} (c,d) \Leftrightarrow \alpha\cdot d = \beta\cdot c$

<u>Ισχυρισμός</u>: Η σχέση R είναι μία σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ και υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση:
$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/_R \to \mathbb{Q} = \{\frac{\alpha}{\beta} \mid (\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\}$

Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο

③ Από το $\mathbb{Q}$, δημιουργούμε ακολουθίες ρητών αριθμών:
$A(\mathbb{Q}) = \{(\alpha_n)_{n\geq 0} \mid n\geq 0\}$ και στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο $AC(\mathbb{Q}) = \{(\alpha_n)_{n\geq 0} \mid (\alpha_n)$: ακολουθία Cauchy$\}$
Στο σύνολο $AC(\mathbb{Q})$ ορίζουμε μία σχέση R ως εξής:
$(\alpha_n)_{n\geq 0} \underset{R}{\sim} (\beta_n)_{n\geq 0} \Leftrightarrow$ αν η ακολουθία $(\alpha_n-\beta_n)_{n\geq 0}$ είναι μηδενική δηλ. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n-\beta_n) = 0$

<u>Ισχυρισμός</u>: Η σχέση R στο $AC(\mathbb{Q})$ είναι μία σχ. ισοδυναμίας και υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $AC(\mathbb{Q})/_R \to \mathbb{R}$

④ Από το $\mathbb{R}$, θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{R}$. Στο σύνολο $\mathbb{R}[x]$ ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας R ως εξής:

$\forall P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x] : P(x) \underset{R}{\sim} Q(x) \Leftrightarrow \exists A(x) \in \mathbb{R}[x] :$

$P(x) - Q(x) = A(x)\ (x^2+1)$

<u>Ισχυρισμός</u>: Η σχέση R επί του $\mathbb{R}[x]$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας και υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $\mathbb{R}[x]/_R \to \mathbb{C}$

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>

Έστω X, Y μη-κενά σύνολα και $f: X \to Y$.
Μπορούμε να γράψουμε την f ως σύνθεση τριών απεικονίσεων: f_1, f_2, f_3 : $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ όπου f_3: επί, f_2: 1-1 και επί, f_1: 1-1 ;

<u>Σχηματικά</u>

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_3", "\text{επί}"'] & Y \\ A \arrow[r, "f_2", "\substack{1-1 \\ \text{και} \\ \text{επί}}"'] & B \arrow[u, "f_1 : 1-1"'] \end{tikzcd}$$